**TEORÍA DE CONTROL**

**Unidad 1: Introducción a los Sistemas de Control**

Sistema de Control

Se define a un **sistema** como la combinación de componentes, conjunto o colección de cosas conectadas o relacionadas de una manera tal que actúan juntas. O un sistema es una combinación de componentes físicos conectados o relacionados de tal manera que forman una unidad completa, o que puedan actuar como una unidad completa.

La palabra **control** generalmente se usa para designar *regulación, dirección o comando.* Al combinar las definiciones anteriores, se tiene:

“Un sistema de control es una combinación de componentes conectados de una manera tal que puedan **comandar, dirigir o regular** así mismo o a otro sistema”.

En la ingeniería y en la ciencia generalmente restringimos el significado de sistemas de control al aplicarlo a esos sistemas cuya función principal es comandar, dirigir o regular *dinámicamente* o *activamente.*

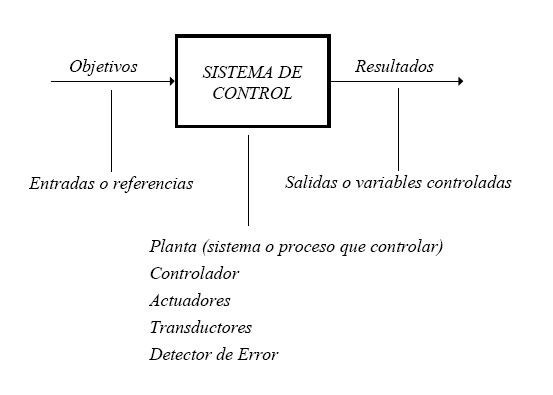
La **entrada** es el estímulo o excitación que se aplica a un sistema de control desde una fuente de energía externa, generalmente con el fin de producir, de parte del sistema de control, una respuesta especificada.

La **salida** es la respuesta obtenida del sistema de control. Puede ser o no puede ser igual a la respuesta especificada que la entrada implica.

El propósito para el que está destinado el sistema de control generalmente determina o define la entrada y salida. Dadas la entrada y la salida es posible determinar o definir la naturaleza de los componentes del sistema.

Existen tres tipos básicos de sistemas de control

1. Sistemas de control hechos por el hombre. Ej.: un conmutador eléctrico: controla el flujo de electricidad.
2. Sistemas de control naturales, incluyendo sistemas biológicos Ej.: el acto de indicar un objeto con el dedo: sistema constituido por los ojos, el brazo, el dedo, la mano, el cerebro.
3. Sistemas de control cuyos componentes están hechos por el hombre y otros por la naturaleza. Ej.: hombre que maneja un automóvil.



Antes de analizar los sistemas de control, deben definirse ciertos términos básicos.

***Variable controlada y señal de control o variable manipulada.*** La variable *controlada* es la cantidad o condición que se mide y controla. La *señal de control* o variable *manipulada* es la cantidad o condición que el controlador modifica para afectar el valor de la variable controlada.

Normalmente, la variable controlada es la salida del sistema. *Controlar* significa medir el valor de la variable controlada del sistema y aplicar la variable manipulada al sistema para corregir o limitar la desviación del valor medido respecto del valor deseado.

***Plantas*.** Se llama planta a cualquier objeto físico que se va a controlar (como un dispositivo mecánico, un horno de calefacción, un reactor químico o una nave espacial).

***Procesos.*** Cualquier operación que se va a controlar. Algunos ejemplos son los procesos químicos, económicos y biológicos.

***Sistemas.*** Un sistema es una combinación de componentes que actúan juntos y realizan un objetivo determinado. Un sistema no está necesariamente limitado a los sistemas físicos. La palabra sistema debe interpretarse en un sentido amplio que comprenda sistemas físicos, biológicos, económicos y similares.

***Perturbaciones.*** Una perturbación es una señal que tiende a afectar negativamente el valor de la salida de un sistema. Si la perturbación se genera dentro del sistema se denomina *interna*, mientras que una perturbación *externa* se genera fuera del sistema y es una entrada.

***Control realimentado.*** El control realimentado se refiere a una operación que, en presencia de perturbaciones, tiende a reducir la diferencia entre la salida de un sistema y alguna entrada de referencia, y lo realiza tomando en cuenta esta diferencia. Aquí sólo se especifican con este término las perturbaciones impredecibles, ya que las perturbaciones predecibles o conocidas siempre pueden compensarse dentro del sistema.

Con el fin de resolver un problema de sistemas, tanto las especificaciones o descripción de la configuración del sistema como sus componentes, se deben poner en una forma susceptible de ser sometida a análisis, diseño y evaluación.

Se usan extensamente tres representaciones básicas (modelos) de los componentes físicos y de los sistemas, en el estudio de los sistemas de control:

1. Ecuaciones diferenciales y otras relaciones matemáticas.

2. Diagramas en bloque.

3. Graficas del flujo de señales.

Los **diagramas en bloque** y **graficas del flujo de señales** son acortamientos en forma de representaciones graficas ya sea de diagramas esquemáticos de un sistema físico o del conjunto de ecuaciones matemáticas que caracterizan las partes del sistema.

Los modelos matemáticos, en forma de ecuaciones del sistema, se emplean cuando se requieren relaciones detalladas. Cada sistema de control se puede caracterizar teóricamente por ecuaciones matemáticas. La solución de estas ecuaciones representa el comportamiento del sistema.

TERMINOLOGIA DE LOS SISTEMAS DE CONTROL

M(S);m(t)

E(S);e(t)

ELEMENTOS DE CONTROL

G1(S); g1(t)

PLANTA

O SISTEMA CONTROLADO

G2(S);g2(t)

ELEMENTOS DE REALIMENTACION

H(S);h(t)

R(S);r(t)

B(S);b(t)

+

+

-

SEÑAL REALIMENTADA

SEÑAL ACTIVA

SEÑAL IMPULSORA

SEÑAL ERROR

SEÑAL DE CONTROL

O VARIABLE MANIPULADA

CONTROLADOR

C(S);c(t)

Clasificación de los Sistemas de Control

Los sistemas se clasifican en dos grandes categorías: *Sistemas de Lazo abierto* y *sistemas de lazo cerrado.* La distinción la determina la acción de control, que es la cantidad que activa el sistema para producir la salida.

Un sistema de control de **lazo abierto** es aquel es el cual la acción de control es independiente de la salida.

Un sistema de control de **lazo cerrado** es aquel en el cual la acción de control es en cierto modo dependiente de la salida.

**Sistemas de control realimentados.** Un sistema que mantiene una relación determinada entre la salida y la entrada de referencia, comparándolas y usando la diferencia como medio de control, se denomina *sistema de control realimentado*. Un ejemplo sería el sistema de control de temperatura de una habitación. Midiendo la temperatura real y comparándola con la temperatura de referencia (temperatura deseada), el termostato activa o desactiva el equipo de calefacción o de enfriamiento para asegurar que la temperatura de la habitación se mantiene en un nivel confortable independientemente de las condiciones externas.

Los sistemas de control realimentados no se limitan a la ingeniería, sino que también se encuentran en diversos campos ajenos a ella. Por ejemplo, el cuerpo humano es un sistema de control realimentado muy avanzado. Tanto la temperatura corporal como la presión sanguínea se conservan constantes mediante una realimentación fisiológica. De hecho, la realimentación realiza una función vital: hace que el cuerpo humano sea relativamente insensible a las perturbaciones externas, permitiendo que funcione de forma adecuada en un entorno cambiante.

**Sistemas de control en lazo cerrado.** Los sistemas de control realimentados se denominan también sistemas de *control en lazo cerrado*. En la práctica, los términos control realimentado y control en lazo cerrado se usan indistintamente. En un sistema de control en lazo cerrado, se alimenta al controlador la señal de error de actuación, que es la diferencia entre la señal de entrada y la señal de realimentación (que puede ser la propia señal de salida o una función de la señal de salida y sus derivadas y/o integrales), con el fin de reducir el error y llevar la salida del sistema a un valor deseado. El término control en lazo cerrado siempre implica el uso de una acción de control realimentado para reducir el error del sistema.

**Sistemas de control en lazo abierto.** Los sistemas en los cuales la salida no tiene efecto sobre la acción de control se denominan *sistemas de control en lazo abierto*. En otras palabras, en un sistema de control en lazo abierto no se mide la salida ni se realimenta para compararla con la entrada. Un ejemplo práctico es una lavadora. El remojo, el lavado y el centrifugado en la lavadora operan con una base de tiempo. La máquina no mide la señal de salida, que es la limpieza de la ropa.

En cualquier sistema de control en lazo abierto, la salida no se compara con la entrada de referencia. Así, a cada entrada de referencia le corresponde una condición de operación fija; como resultado de ello, la precisión del sistema depende de la calibración. Ante la presencia de perturbaciones, un sistema de control en lazo abierto no realiza la tarea deseada. En la práctica, el control en lazo abierto sólo se usa si se conoce la relación entre la entrada y la salida y si no hay perturbaciones internas ni externas. Es evidente que estos sistemas no son de control realimentado. Obsérvese que cualquier sistema de control que opere con una base de tiempo está en lazo abierto. Por ejemplo, el control de tráfico mediante señales operadas con una base de tiempo es otro ejemplo de control en lazo abierto.

Para clasificar un sistema de control como de lazo abierto o lazo cerrado, se deben distinguir claramente los componentes del sistema de los componentes que interactúan con él pero que no forman parte del mismo.

Los sistemas de control de lazo cerrado se llaman comúnmente sistemas de control por *retroalimentación.*

**Retroalimentación** es la propiedad de un sistema de lazo cerrado que permite que la salida (o cualquier otra variable controlada del sistema) sea comparada con la entrada al sistema (o con una entrada a cualquier componente interno del sistema o con un subsistema) de tal manera que se pueda establecer la acción de control apropiada como función de la entrada y la salida.

**Sistemas de control en lazo cerrado en comparación con sistemas en lazo abierto.**

Una ventaja del sistema de control en lazo cerrado es que el uso de la realimentación vuelve la respuesta del sistema relativamente insensible a las perturbaciones externas y a las variaciones internas en los parámetros del sistema. Es así posible usar componentes relativamente poco precisos y baratos para obtener el control adecuado de una planta determinada, mientras que hacer eso es imposible en el caso de un sistema en lazo abierto.

Desde el punto de vista de estabilidad, el sistema de control en lazo abierto es más fácil de desarrollar, porque la estabilidad del sistema no es un problema importante. Por otra parte, la estabilidad es un gran problema en el sistema de control en lazo cerrado, que puede conducir a corregir en exceso errores que producen oscilaciones de amplitud constante o cambiante.

Debe señalarse que, para los sistemas en los que se conocen con anticipación las entradas y en los cuales no hay perturbaciones, es aconsejable emplear un control en lazo abierto. Los sistemas de control en lazo cerrado sólo tienen ventajas cuando se presentan perturbaciones y/o variaciones impredecibles en los componentes del sistema. Obsérvese que la potencia nominal de salida determina en forma parcial el coste, peso y tamaño de un sistema de control. El número de componentes usados en un sistema de control en lazo cerrado es mayor que el que se emplea para un sistema de control equivalente en lazo abierto. Por tanto, el sistema de control en lazo cerrado suele tener costes y potencias más grandes. Para disminuir la potencia requerida de un sistema, se emplea un control en lazo abierto siempre que pueda aplicarse. Por lo general, una combinación adecuada de controles en lazo abierto y en lazo cerrado es menos costosa y ofrecerá un comportamiento satisfactorio del sistema global.

En ciertas circunstancias (por ejemplo, si no hay perturbaciones o la salida es difícil de medir) pueden ser deseables los sistemas de control en lazo abierto. Por tanto, es conveniente resumir las ventajas y desventajas de utilizar sistemas de control en lazo abierto.

Las ventajas fundamentales de los sistemas de control en lazo abierto son las siguientes:

**1.** Construcción simple y facilidad de mantenimiento.

**2.** Menos costosos que el correspondiente sistema en lazo cerrado.

**3.** No hay problemas de estabilidad.

**4.** Convenientes cuando la salida es difícil de medir o cuando medir la salida de manera precisa no es económicamente viable. (Por ejemplo, en el caso de la lavadora, sería bastante costoso proporcionar un dispositivo para medir la calidad de la salida de la lavadora, es decir, la limpieza de la ropa lavada.)

Las desventajas fundamentales de los sistemas de control en lazo abierto son las siguientes:

**1.** Las perturbaciones y los cambios en la calibración originan errores, y la salida puede ser diferente de lo que se desea.

**2.** Para mantener la calidad requerida en la salida, es necesaria la recalibración de vez en cuando.

**Unidad 2: Modelo Matemático de Sistemas de Control**

Con la finalidad de entender el comportamiento de los sistemas es necesario obtener modelos matemáticos que los representen.

Un modelo matemático de un sistema dinámico se define como un conjunto de ecuaciones que representan la dinámica del sistema con precisión, o con gran aproximación.

Un *modelo matemático* de un sistema es una “replica” de las relaciones entre entrada y salida o entre entradas y salidas. Las relaciones reales entre la entrada y la salida de un sistema se sustituyen por expresiones matemáticas.

**Sistemas Lineales.** Un sistema se denomina lineal si se aplica el principio de superposición.

Este principio establece que la respuesta producida por la aplicación simultánea de dos funciones de entradas diferentes es la suma de las dos respuestas individuales. Por tanto, para el sistema lineal, la respuesta a varias entradas se calcula tratando una entrada cada vez y sumando los resultados. A menudo los sistemas lineales pueden representarse por ecuaciones diferenciales lineales, que son aquellas ecuaciones diferenciales formadas por términos lineales.

Si en una investigación experimental de un sistema dinámico son proporcionales la causa y el efecto, lo cual implica que se aplica el principio de superposición, el sistema se considera lineal.

**Sistemas lineales invariantes y variantes en el tiempo.** Una ecuación diferencial es lineal si sus coeficientes son constantes o son funciones sólo de la variable independiente. Los sistemas dinámicos formados por componentes de parámetros concentrados lineales invariantes con el tiempo se describen mediante ecuaciones diferenciales lineales invariantes en el tiempo —de coeficientes constantes. Tales sistemas se denominan sistemas *lineales in*v*ariantes en el tiempo* (o *lineales de coeficientes constantes*). Los sistemas que se representan mediante ecuaciones diferenciales cuyos coeficientes son funciones del tiempo, se denominan sistemas *lineales* v*ariantes en el tiempo*. Un ejemplo de un sistema de control variante en el tiempo es un sistema de control de naves espaciales. (La masa de una nave espacial cambia debido al consumo de combustible.)

**Causalidad y Sistemas Físicamente Realizables.** Un sistema en el cual el tiempo es la variable independiente, se llama causal, si la salida depende solamente de los valores anteriores y actuales que se aplicaron a su entrada. Es decir, si y(t) es la salida, entonces y(t) depende solamente de la entrada x(**t’**), para valores de t<t.’ Esto quiere decir que un sistema causal es aquel que no puede predecir cuál será su entrada futura.

De acuerdo con esto, los sistemas causales a menudo se denominan sistemas físicamente realizables.

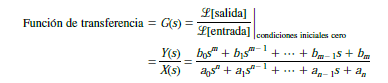
**Función de Transferencia y de respuesta-impulso**

En la teoría de control, se utiliza las funciones de transferencia para caracterizar las relaciones de entrada-salida de componentes o de sistemas que se describen mediante ecuaciones diferenciales lineales invariantes en el tiempo.

Función de Transferencia: la función de transferencia de un sistema descrito mediante una ecuación diferencial lineal e invariante en el tiempo se define como el cociente entre la transformada de Laplace de la salida (Función de respuesta) y la transformada de Laplace de la entrada (función de excitación) bajo la suposición de que todas las condiciones iniciales son cero.

Considerando el sistema lineal e invariante en el tiempo descrito mediante la siguiente ecuación diferencial:



Donde y es la salida del sistema y x es la entrada. La función de transferencia de este sistema es el cociente de la transformada de Laplace de la salida y la transformada de Laplace de la entrada cuando todas sus condiciones iniciales son cero, o:

La aplicación del concepto de función de transferencia está limitada a los sistemas descriptos mediante ecuaciones diferenciales lineales invariante en el tiempo.

Características:

* + La función de transferencia de un sistema es un modelo matemático porque es un método operacional para expresar la ecuación diferencial que relaciona la variable de salida con la variable de entrada.
  + La función de transferencia es una propiedad de un sistema, independientemente de la magnitud y naturaleza de la entrada o función de excitación.
  + La función de transferencia incluye las unidades necesarias para relacionar la entrada con la salida; sin embargo, no proporciona información acerca de la estructura física del sistema.
  + Si se conoce la función de transferencia de un sistema, se estudia la salida o respuesta para varias formas de entrada, con la intención de comprender la naturaleza del sistema.
  + Si se desconoce la función de transferencia, puede establecerse experimentalmente introduciendo entradas conocidas y estudiando la salida del sistema. Una vez establecida una función de transferencia, proporciona una descripción completa de las características dinámicas del sistema, a diferencia de su descripción física.

**Respuesta-impulso.** Considérese la salida (respuesta) de un sistema para una entrada impulso unitario cuando las condiciones iniciales son cero. Como la transformada de Laplace de la función impulso unitario es la unidad, la transformada de Laplace de la salida del sistema es *Y*(*s*)=*G*(*s*).

La transformada inversa de Laplace de la salida obtenida mediante la Ecuación anterior proporciona la respuesta-impulso del sistema. La transformada inversa de Laplace de *G*(*s*), o bien



se denomina respuesta-impulso. Esta respuesta *g*(*t*) también se denomina función de ponderación del sistema.

De este modo, la respuesta-impulso *g*(*t*) es la respuesta de un sistema lineal a una entrada impulso unitario cuando las condiciones iniciales son cero. La transformada de Laplace de esta función proporciona la función de transferencia. Por tanto, la función de transferencia y la respuesta-impulso de un sistema lineal e invariante en el tiempo contienen la misma información sobre la dinámica del sistema. Por lo tanto, es posible obtener información completa sobre las características dinámicas del sistema si se excita el sistema con una entrada impulso y se mide la respuesta. (En la práctica, una entrada pulso con una duración muy corta comparada con las constantes de tiempo significativas del sistema se considera un impulso.)

**Sistemas de Control Automáticos:**

**Diagramas de Bloques**

Un sistema de control puede tener varios componentes. Para mostrar las funciones de cada componente en la ingeniería de control, por lo general se usa una representación denominada *diagrama de bloques.*

Un *diagrama de bloques* de un sistema es una representación gráfica de las funciones que lleva a cabo cada componente y el flujo de señales. Tales diagramas muestran las relaciones existentes entre los diversos componentes. A diferencia de una representación matemática puramente abstracta, un diagrama de bloques tiene la ventaja de indicar de forma más realista el flujo de las señales del sistema real.

En un diagrama de bloques todas las variables del sistema se enlazan unas con otras mediante bloques funcionales. El bloque *funcional* o simplemente *bloque* es un símbolo para representar la operación matemática que sobre la señal de entrada hace el bloque para producir la salida. Las funciones de transferencia de los componentes por lo general se introducen en los bloques correspondientes, que se conectan mediante flechas para indicar la dirección del flujo de señales.

En general, la operación funcional del sistema se aprecia con más facilidad si se examina el diagrama de bloques que si se revisa el sistema físico mismo. Un diagrama de bloques contiene información relacionada con el comportamiento dinámico, pero no incluye información de la construcción física del sistema. En consecuencia, muchos sistemas diferentes y no relacionados pueden representarse mediante el mismo diagrama de bloques.

Debe señalarse que, en un diagrama de bloques, la principal fuente de energía no se muestra explícitamente y que el diagrama de bloques de un sistema determinado no es único. Es posible dibujar varios diagramas de bloques diferentes para un sistema, dependiendo del punto de vista del análisis.

La forma más sencilla del diagrama en bloques es el *bloque* simple que lleva una entrada y una salida.

***Punto de suma.*** Un círculo con una cruz es el símbolo que indica una operación de suma. El signo más o el signo menos en cada punta de flecha indica si la señal debe sumarse o restarse. Es importante que las cantidades que se sumen o resten tengan las mismas dimensiones y las mismas unidades.

***Punto de ramificación.*** Un *punto de ramificación* es aquel a partir del cual la señal de un bloque va de modo concurrente a otros bloques o puntos de suma.

**Algunas Técnicas de Reducción**

Entradas múltiples.

Cuando están presentes entradas múltiples en un sistema *lineal*, cada una se trata independientemente de las otras. La salida ocasionada por todos los estímulos actuando conjuntamente se encuentra de la siguiente manera:

**Paso 1:** Igualar todas las entradas a cero excepto una.

**Paso 2:** Transformar el diagrama en bloque a la forma canoníca, usando las transformaciones de la tabla anterior.

**Paso 3:** Calcular la respuesta debida a la entrada escogida actuando sola.

**Paso 4:** Repetir los pasos 1 a 3 para cada una de las entradas restantes.

**Paso 5:** Añadir algebraicamente todas las respuestas (salidas) determinadas de los pasos 1 a 5. Esta suma es la salida total del sistema con todas las entradas actuando simultáneamente.

**Un sistema en lazo cerrado sujeto a una perturbación.**

Los sistemas de control de lazo cerrado poseen una retroalimentación de la salida en la entrada que permite corregir el valor de la variable de salida y reducir el error variante.

Los sistemas de control en lazo cerrado son aquellos en los que existe una realimentación de la señal de salida o, dicho de otra forma, aquellos en los que la señal de salida tiene efecto sobre la acción de control.

-Se trata de sistemas complejos, ya que poseen gran cantidad de parámetros.

-La salida se compara con la entrada y afecta al control del sistema.

-Son notablemente más estables frente a perturbaciones y variaciones internas.

****

**Señales:**

**R(s): Variable de Entrada**

**D(s): Perturbaciones**

**C(s): Variable de Salida: Es utilizada además como entrada al sistema**

**Punto de Suma o Sumador**

**G1(s): Planta, actuador**

**G2(s): Regulador**

**H(s): Controlador de Realimentación**

La Figura muestra un sistema en lazo cerrado sujeto a una perturbación. Cuando se presentan dos entradas (la entrada de referencia y la perturbación) en un sistema lineal, cada una de ellas puede tratarse de forma independiente; y las salidas correspondientes a cada entrada pueden sumarse para obtener la salida completa. La forma en que se introduce cada entrada en el sistema se muestra en el punto de suma mediante un signo más o un signo menos.

Considérese el sistema que se muestra en la figura. Al examinar el efecto de la perturbación *D*(*s*), podemos suponer que el sistema está inicialmente relajado, con un error cero; después se puede calcular la respuesta *CD*(*s*) sólo para la perturbación. Esta respuesta se encuentra a partir de



Por otra parte, si se considera la respuesta a la entrada de referencia *R*(*s*), se puede suponer que la perturbación es cero. Entonces, la respuesta *CR*(*s*) a la entrada de referencia *R*(*s*) se obtiene a partir de



La respuesta a la aplicación simultánea de la entrada de referencia y la perturbación se obtiene sumando las dos respuestas individuales. En otras palabras, la respuesta *C*(*s*) producida por la aplicación simultánea de la entrada de referencia *R*(*s*) y la perturbación *D*(*s*) se obtiene mediante



Considérese ahora el caso en el que |*G*1(*s*)*H*(*s*)| >> 1 y |G1(*s*)*G*2(*s*)*H*(*s*)| >> 1. En este caso, la función de transferencia en lazo cerrado *CD*(*s*)/*D*(*s*) se hace casi cero, y se suprime el efecto de la perturbación. Esta es una ventaja del sistema en lazo cerrado.

Por otra parte, la función de transferencia en lazo cerrado *CR*(*s*)/*R*(*s*) se aproxima a 1/*H*(*s*) conforme aumenta la ganancia de *G*1(*s*)*G*2(*s*)*H*(*s*). Esto significa que si *G*1(*s*)*G*2(*s*)*H*(*s*) >> 1, entonces la función de transferencia en lazo cerrado *CR*(*s*)/*R*(*s*) se vuelve independiente de *G*1(s) y *G*2(*s*) y se hace inversamente proporcional a *H*(*s*), por lo que las variaciones de *G*1(*s*) y *G*2(s) no afectan a la función de transferencia en lazo cerrado *CR*(*s*)/*R*(*s*). Es fácil observar que cualquier sistema en lazo cerrado con una realimentación unitaria, *H*(*s*)=1, tiende a igualar la entrada y la salida.

**Análisis de la Respuesta Transitoria**

La señal de entrada para un sistema de control no se conoce con anticipación, pero es de naturaleza aleatoria, y la entrada instantánea no puede expresarse en forma analítica.

En el análisis y diseño de sistemas de control, debemos tener una base de comparación del desempeño de diversos sistemas de control. Esta base se configura especificando las señales de entrada de prueba particulares y comparando las respuestas de varios sistemas a estas señales de entrada.

Muchos criterios de diseño se basan en tales señales o en la respuesta del sistema a los cambios en las condiciones iniciales (sin señales de prueba). El uso de señales de prueba se justifica porque existe una correlación entre las características de respuesta de un sistema para una señal de entrada de prueba común y la capacidad del sistema de manejar las señales de entrada reales.

La forma de la entrada a la que el sistema estará sujeto con mayor frecuencia bajo una operación normal determina cuál de las señales de entrada típicas se debe usar para analizar las características del sistema. Si las entradas para un sistema de control son funciones del tiempo que cambian en forma gradual, una función rampa sería una buena señal de prueba. Asimismo, si un sistema está sujeto a perturbaciones repentinas una función escalón sería una buena señal de prueba; y para un sistema sujeto a entradas de choque, una función impulso sería la mejor.

Una vez diseñado un sistema de control con base en las señales de prueba, por lo general el desempeño del sistema en respuesta a las entradas reales es satisfactorio. El uso de tales señales de prueba permite comparar el desempeño de todos los sistemas sobre la misma base.

**Señales de prueba típicas.** Las señales de prueba que se usan regularmente son funciones escalón, rampa, parábola, impulso, senoidales, etc. Con estas señales de prueba, es posible realizar con facilidad análisis matemáticos y experimentales de sistemas de control, dado que las señales son funciones del tiempo muy simples.

**Respuesta transitoria y respuesta en estado estable.** La respuesta en el tiempo de un sistema de control consta de dos partes: la respuesta transitoria y la respuesta en estado estable. Por respuesta transitoria nos referimos a la que va del estado inicial al estado final. Por respuesta en estado estable, nos referimos a la manera en la cual se comporta la salida del sistema conforme t tiende a infinito.

**Estabilidad absoluta, estabilidad relativa y error en estado estable.** Al diseñar un sistema de control, debemos ser capaces de predecir su comportamiento dinámico a partir del conocimiento de los componentes. La característica más importante del comportamiento dinámico de un sistema de control es la estabilidad absoluta, es decir, si el sistema es estable o inestable. Un sistema de control esta en equilibrio si, en ausencia de cualquier perturbación o entrada, la salida permanece en el mismo estado. Un sistema de control lineal e invariante con el tiempo es estable si la salida termina por regresar a su estado de equilibrio cuando el sistema está sujeto a una condición inicial. Un sistema de control lineal e invariante con el tiempo es críticamente estable si las oscilaciones de la salida continúan para siempre. Es inestable si la salida diverge sin límite a partir de su estado de equilibrio cuando el sistema está sujeto a una condición inicial. En realidad, la salida de un sistema físico puede aumentar hasta un cierto grado, pero puede estar limitada por “detenciones” mecánicas o el sistema puede colapsarse o volverse no lineal después de que la salida excede cierta magnitud, por lo cual ya no se aplican las ecuaciones diferenciales lineales.

Entre los comportamientos importantes del sistema (aparte de la estabilidad absoluta) que deben recibir una cuidadosa consideración están la estabilidad relativa y el error en estado estacionario. Como un sistema de control físico implica un almacenamiento de energía, la salida del sistema, cuando este está sujeto a una entrada, no sucede a la entrada de inmediato, sino que muestra una respuesta transitoria antes de alcanzar un estado estacionario. La respuesta transitoria de un sistema de control práctico, con frecuencia, muestra oscilaciones amortiguadas antes de alcanzar un estado estacionario. Si la salida de un sistema en estado estacionario no coincide exactamente con la entrada, se dice que el sistema tiene un error en estado estacionario. Este error indica la precisión del sistema. Al analizar un sistema de control, se debe examinar el comportamiento de la respuesta transitoria y el comportamiento en estado estacionario.

Sistemas de Primer Orden

Considere el sistema de primer orden de la figura, el cual físicamente representa un circuito RC, un sistema térmico o algo similar.



La relación entrada-salida se obtiene mediante



En lo sucesivo, se analizarán las respuestas del sistema a entradas tales como la función escalón unitario, rampa unitaria e impulso unitario. Se supone que las condiciones iniciales son cero.

Observe que todos los sistemas que tienen la misma función de transferencia exhibirán la misma salida en respuesta a la misma entrada. Para cualquier sistema físico dado, la respuesta matemática recibe una interpretación física.

**Respuesta escalón unitario de sistemas de primer orden.**

Dado que la transformada de Laplace de la función escalón unitario es 1/s, sustituyendo ***R(s)*** = 1/s en la ecuación, obtenemos



expandir por facciones simples y tomar la transformada inversa de Lapace, obtenemos



La ecuación anterior plantea que la salida es inicialmente cero y al final se vuelve unitaria.



**Respuesta rampa unitaria de sistemas de primer orden.**

Dado que la transformada de Laplace de la función rampa unitaria es 1/s2, obtenemos la salida del sistema como



Si expandimos en fracciones simples y aplicamos la transformada inversa de Laplace obtenemos



De este modo, la señal de error *e(t)* es



Conforme t tiende a infinito, e-t/T se aproxima a cero y, por tanto, la señal de error *e(t) se* aproxima a *T o*



La entrada rampa unitaria y la salida del sistema se muestran en la figura a continuación:



El error después de la entrada rampa unitaria es igual a *T* para una t suficientemente grande. Entre más pequeña es la constante de tiempo *T,* más pequeño es el error en estado estable después de la entrada rampa.

**Respuesta impulso unitario de sistemas de primer orden.**

Para la entrada impulso unitario, la transformada es R(s) = 1 y la salida del sistema puede obtenerse como:



O bien



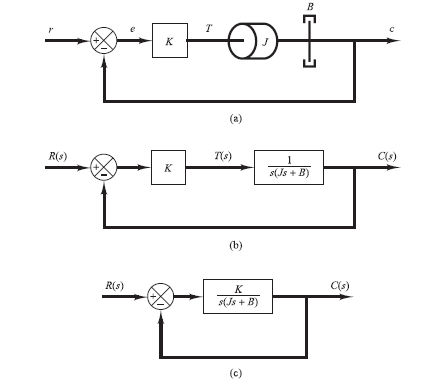
La curva de respuesta obtenida mediante la ecuación anterior aparece en la figura a continuación:



**Sistemas de Segundo Orden**

La función de transferencia en forma estándar de un sistema de segundo orden se expresa como.

Servosistemas: Consiste en un controlador proporcional y elementos de carga. Se supone que se desea controlar la posición de salida c de forma que siga a la posición de entrada r.



La ecuación para los elementos de carga es:



Donde T es el par producido por el controlador proporcional de ganancia K. Tomando la transformada de Laplace a ambos lados de esta última ecuación, suponiendo condiciones iniciales nulas, se obtiene:



Por tanto, la función de transferencia entre C(s)y T(s) es:

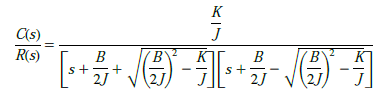


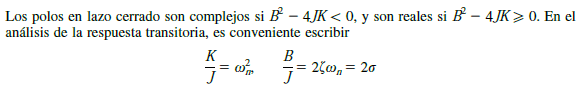
La Función de transferencia en lazo cerrado se obtiene entonces como:

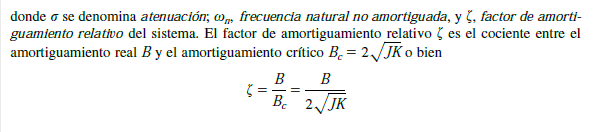
**Respuesta de Escalón de sistemas de segundo orden.**

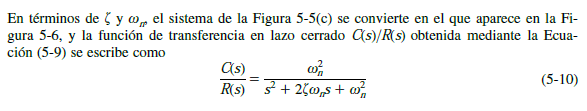
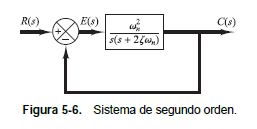
La función de transferencia en lazo cerrado del sistema es:

Que puede reescribirse como:









Esta forma se denomina forma estándar del sistema de segundo orden.

El comportamiento dinámico del sistema de segundo orden se describe a continuación en términos de dos parámetros ζ y ω*n*. Si 0< ζ <1, los polos en lazo cerrado son complejos conjugados y se encuentran en el semiplano izquierdo del plano *s*. El sistema, entonces, se denomina subamortiguado y la respuesta transitoria es oscilatoria. Si ζ <0, la respuesta transitoria no se amortigua. Si ζ =1, el sistema se denomina críticamente amortiguado. Los sistemas sobre amortiguados corresponden a ζ >1.

Ahora se obtendrá la respuesta del sistema para una entrada escalón unitario. Consideraremos tres casos diferentes:

1. *Caso subamortiguado* (0< ζ <1): en este caso, *C*(*s*)/*R*(*s*) se escribe como



donde . La frecuencia ω*d* se denomina ***frecuencia natural amortiguada***. Para una entrada escalón unitario, *C*(*s*) se escribe como



Desarrollando la transformada inversa de Laplace para C(s) nos queda



Los polos del sistema se encuentran en:



Si el factor de amortiguamiento relativo ζ es igual a cero, la respuesta se vuelve no amortiguada y las oscilaciones continúan indefinidamente.

1. *Caso críticamente amortiguado* (ζ = 1): si los dos polos de *C*(*s*)/*R*(*s*) son casi iguales, el sistema se aproxima mediante uno críticamente amortiguado.

Para una entrada escalón unitario, *R*(*s*)=1/*s* y *C*(*s*) se escribe como



La transformada inversa de Laplace de la Ecuación se encuentra como



1. *Caso sobreamortiguado* (ζ > 1): en este caso, los dos polos de *C*(*s*)/*R*(*s*) son reales negativos y diferentes. Para una entrada escalón unitario, *R*(*s*)=1/*s* y *C*(*s*) se escriben como



La respuesta del tiempo *c*(*t*) es, entonces



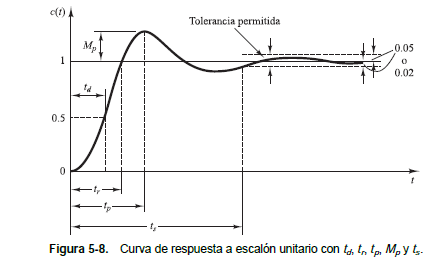
La siguiente figura contiene una familia de curvas c(t) con diversos valores de ξ, en donde la abscisa es la variable adimensional ω*n*,. Las curvas solo son funciones de ξ



**Definiciones de las especificaciones de respuesta transitoria.** En muchos casos prácticos, las características de desempeño deseadas del sistema de control se especifican en términos de cantidades en el dominio del tiempo. Los sistemas que pueden almacenar energía no responden instantáneamente y presentan respuestas transitorias cada vez que están sujetos a entradas o perturbaciones.

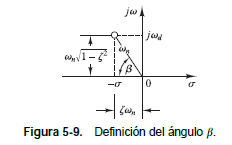
Con frecuencia, las características de desempeño de un sistema de control se especifican en términos de la respuesta transitoria para una entrada escalón unitario, puesto que esta es fácil de generar y es suficientemente drástica. (Si se conoce la respuesta a una entrada escalón, es matemáticamente posible calcular la respuesta para cualquier entrada).

La respuesta transitoria de un sistema para una entrada escalón unitario depende de las condiciones iniciales. Por conveniencia al comparar respuestas transitorias de varios sistemas, es una práctica común usar la condición inicial estándar de que el sistema está en reposo al inicio, por lo cual la salida y todas las derivadas con respecto al tiempo son cero. De este modo, las características de respuesta se comparan con facilidad. La respuesta transitoria de un sistema de control práctico exhibe con frecuencia oscilaciones amortiguadas antes de alcanzar el estado estable. Al especificar las características de la respuesta transitoria de un sistema de control para una entrada escalón unitario, es común especificar lo siguiente:



**Tiempo de retardo, td:** el tiempo de retardo es el tiempo requerido para que la respuesta alcance la primera vez la mitad del valor final.

**Tiempo de subida, *tr*:** el tiempo de subida es el tiempo requerido para que la respuesta pase del 10 al 90%, del 5 al 95% o del 0 al 100% de su valor final. Para sistemas subamortiguados de segundo orden, por lo general se usa el tiempo de subida de 0 a 100%. Para sistemas sobreamortiguados, suele usarse el tiempo de levantamiento de 10 a 90%.



**Tiempo pico, *tp*:** el tiempo pico es el tiempo requerido para que la respuesta alcance el primer pico de sobreelongación.

Como el tiempo pico corresponde al primer pico de sobreelongación máximo, . Por tanto,

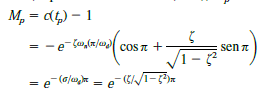
El tiempo pico *tp* corresponde a medio ciclo de la frecuencia de oscilación amortiguada.

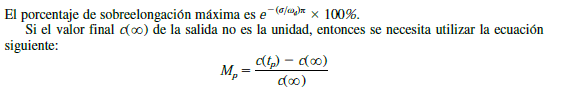
Tp es proporcional a ζ e inversamente proporcional a ω*n*. Al incrementar la frecuencia natural no amortiguada, se reduce tp.

**Sobre elongación máxima (porcentaje), *Mp*:**

La sobreelongación máxima se presenta en el tiempo pico o en *t=tp*=π/ω*n*. Por lo tanto

Por tanto, se obtiene Mp como:







El porcentaje de sobreelongación máxima es



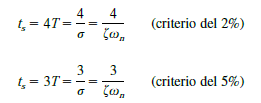
La relación entre la sobreelongación en porcentaje *Mp* y el factor de amortiguamiento relativo ζ se presenta en la siguiente figura

**Tiempo de asentamiento, *ts*:** El tiempo de asentamiento es el tiempo que se requiere para que la curva de respuesta alcance un rango alrededor del valor final del tamaño especificado por el porcentaje absoluto del valor final (por lo general, de 2 o 5%). El tiempo de asentamiento se relaciona con la mayor constante de tiempo del sistema de control. Los objetivos del diseño del sistema en cuestión determinan qué criterio de error en porcentaje utilizar.

Cambio de transitorio a permanente.

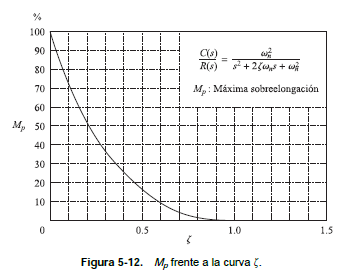
Si la constante de tiempo Ts es chica, más rápido será el sistema.

Por conveniencia, cuando se comparan las respuestas de los sistemas, por lo general se define el tiempo de asentamiento *ts* como



El tiempo de asentamiento es inversamente proporcional al producto del factor de amortiguamiento relativo y la frecuencia natural no amortiguada del sistema.

Para una respuesta rápida, Wn debe ser grande.

Relación entre la sobre elongación en porcentaje Mp y el factor de amortiguamiento relativo

Las especificaciones en el dominio del tiempo que se han proporcionado son muy importantes, ya que casi todos los sistemas de control son sistemas en el dominio del tiempo; es decir, deben presentar respuestas de tiempo aceptables. (Esto significa que el sistema de control debe modificarse hasta que la respuesta transitoria sea satisfactoria.)

Obsérvese que todas estas especificaciones no se aplican necesariamente a cualquier caso determinado. Por ejemplo, para un sistema sobreamortiguado no se aplican los términos tiempo pico y sobreelongación máxima. (En los sistemas que producen errores en estado estacionario para entradas escalón, este error debe conservarse dentro de un nivel de porcentaje especificado.